キャップの回転に伴う歳差運動の解析

宮城県仙台第三高等学校　理数科6班

1. 背景と目的

ペンのキャップに回転を与えた時、不思議な挙動をすることに興味

・歳差運動とみられるが、接地点は点でなく円の縁。
・安定して回転しつつゆっくりと倒れていく

→コマの歳差運動とも異なる。

キャップの歳差運動がどのように起こっているのか調べることが目的

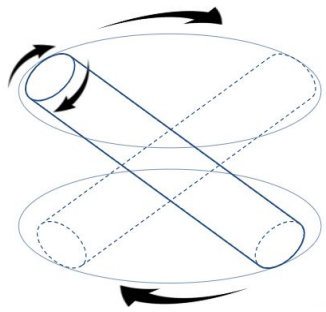


Fig1.キャップの回転運動

2. 観察と仮説

(1)自転の角速度と歳差の角速度の関係

・λ 自転の角速度　・ω 歳差の角速度
・m キャップの質量　・g 重力加速度
・I キャップの慣性モーメント　・L 角運動量ベクトルの大きさ
・ℓ キャップの中心から接地点までの距離　・r キャップの半径
・θ 地面に対するキャップの回転軸の角度

①歳差運動では、重力による影響は首振りに変わる

→ $\ell\cos\theta \times mg \times \Delta t = L\cos\theta \times \Delta\Phi$

②$\Delta\Phi = \omega \times \Delta t$、$L = I \times \lambda$ より、ωについて整理し

→ $\omega = (\ell \times mg)/L = (\ell \times mg)/I \times \lambda$

③**歳差が地面と擦れる速度**　$\ell\cos\theta \times \omega$に②を代入し、

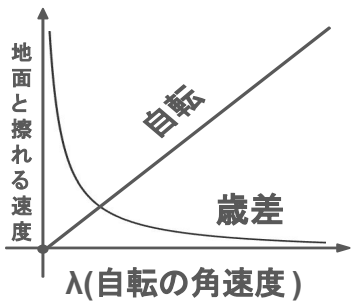
歳差が地面と擦れる速度…$(\ell^2 \times mg \times \cos\theta)/I \times \lambda$

④**自転が地面と擦れる速度** は

自転が地面と擦れる速度…$r \times \lambda$

③の式と④の式はそれぞれλを変数とる反比例と比例の式
→グラフの概形を作ると一点で交差する

この点を境に自転、歳差が地面と擦れる速度の上下関係が入れ替わる。



(2)角運動量ベクトルから考える仮説

キャップの自転と歳差運動では、地面からの摩擦のかかり方が逆になる
→どちらのほうが速いかにより発生する角運動量ベクトルの向きが変わる

→キャップが立とうとするか倒れようとするかが変わる

理論上は**キャップはキャップの自転の方が速い場合は立とうとし、歳差運動の方が速い場合は倒れようとする**。
しかし観測できているケースでは、**キャップは倒れようとする**

このことから私達は、以下の仮説を導いた。

「キャップ回しにおいて、自転よりも歳差運動のほうが　速く接地点は歳差運動の方向にこすれている。」

3. 実験の材料と方法

キャップ…内径8mm、厚み1mmのアクリルパイプを50mmに切断したもの

①キャップに赤い線を引き、回転させた様子をスローで撮影

②歳差運動が1回転する時間(T)にキャップの自転が何回転しているかを計測

③キャップの円周、歳差が描く円の円周をそれぞれ計測し、回転数を用いて自転の速度Vs(自転でこすれた長さ/T)と歳差の速度Vp(歳差でこすれた長さ/T)を計算、比較する

キャップの自転…　回転数 × キャップの縁の円周 ＝ 自転でこすれた長さ
→ 自転でこすれた長さ / T ＝ Vs

歳差運動…　回転数 × 歳差が描く円の円周 ＝ 歳差でこすれた長さ
→ 歳差でこすれた長さ / T ＝ Vp

この2つを比較
Vs＞Vpなら自転の速度、Vs＜Vpなら歳差の速度のほうが大きくなる。

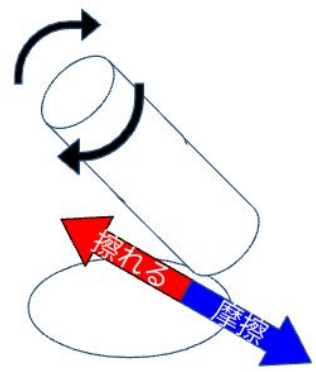


fig.2 自転の摩擦の向き

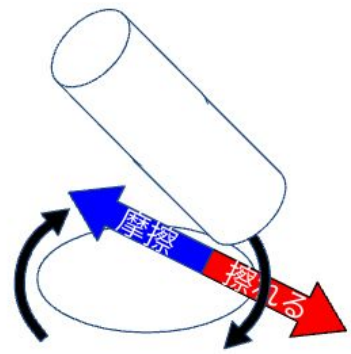


fig.3 歳差の摩擦の向き

4. 実験結果・考察

	キャップの自転	歳差運動
回転数	4.0	1.0
円周の長さ	πcm	4.3πcm　※1
Vs ・ Vp	4.0πcm / T	4.3πcm / T

※1画面上での計測より、歳差運動が描く円の直径は 4.3cm

キャップは4回転　円周はπcm　→ Vsは4.0πcm / T

歳差運動は1回転　円周は4.3πcm　→ Vpは 4.3πcm / T

Table1.実験結果

Vs ＜ Vp であったため、キャップの縁は**歳差運動の方向にこすれている**

→キャップ回しにおいては歳差運動のほうが自転よりも速度が大きく、キャップの縁は歳差運動の方向にこすれているため、**仮説は正しい**と言える

5その他の観察

糸を用いて回転量を大きくしてキャップの観察を行ったところ、
一瞬だけ歳差運動が起こった後、すぐに立ち上がりその慣性で跳び上がる
という挙動を見せた。
手で回した際にはキャップはゆっくりと倒れたのに対し、今回のケースでは勢いよく跳び上がった。この挙動の違いがどのような理由で起こるのかは解明できていない。

6. 研究のまとめ

実験や観察から、キャップの挙動は地面からの摩擦の影響により自転と歳差のどちらが速いかによって発生する角運動量ベクトルの向きが変化し、立つか寝るかが変わることがわかったが、5に示した観察の際ゆっくりとは立ちあがらず跳び上がったのはなぜかという疑問点が残った。

参考文献

1)歳差運動の物理学 https://home.hiroshima-u.ac.jp/kyam/pages/results/monograph/Ref05_precess.pdf
2)剛体ってなんだろう https://hooktail.sub.jp/mechanics/rigidBody/