第４部　宇宙の構造　第１章　太陽系の天体

Ｂ　惑星の軌道運動　教ｐ３３２～３３４

前時までの復習：ケプラーの法則

・ケプラーの第１法則（楕円軌道の法則）

惑星は太陽を焦点の１つとする楕円軌道を描く

・ケプラーの第２法則（面積速度一定の法則）

各惑星について、太陽と惑星を結ぶ線分（動径）は、等しい時間に等しい面積を描く。

・ケプラーの第３法則（調和の法則）

惑星と太陽の平均距離aの３乗は、惑星の公転周期Pの２乗に比例する。

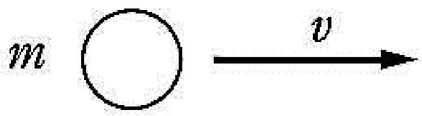
中学校でも様々なエネルギーについて学習をしてきた。

①　動いている物体がもつエネルギーを

〔1　運動エネルギー　〕という。

右の図のように質量m〔kg〕、速さv〔m/s〕で運動している物体が

もつエネルギーはK＝〔2　$\frac{1}{2}mv^2$　〕と表される。



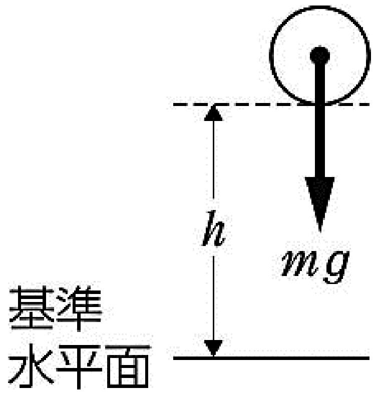
②　高い位置にある物体がもつエネルギーを

〔3　位置エネルギー　〕という。

右の図のように質量m〔kg〕、高さh〔m〕、重力加速度の大きさg

〔m/s²〕で運動している物体がもつエネルギーは

U＝〔4　mgh　〕と表される。



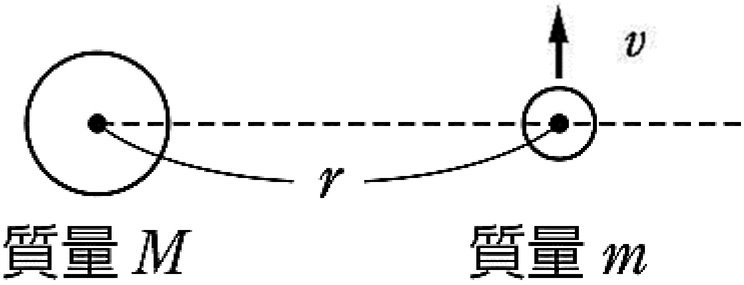
①と②のエネルギーを合わせて

〔5　力学的エネルギー　〕といい、これは摩擦や空気抵抗がなければ保存される

これらは、あくまで地表近くでの話。現在学習している領域は“宇宙”。

スケールが異なるため、それぞれのエネルギーも異なった量で表さなければならないのでは？

図のように質量M〔kg〕の天体（焦点の位置にある）のまわりを質量m〔kg〕の惑星が速さv〔m/s〕で円軌道を描いて運動している。天体と惑星間の距離をr〔m〕とする。



①' 惑星が動いていることでもつようになったエネルギーは

K =〔6 $\frac{1}{2}mv^2$ 〕と表すことができる。

②' 惑星が天体からr〔m〕だけ離れることでもつようになったエネルギーは

U =〔7 $-G\frac{Mm}{r}$ 〕と表すことができる。

※この式の基準は〔8 無限遠 〕である。

・〔9 G 〕〔N･m²/kg²〕･･･〔10 万有引力定数 〕という。直接的な目的ではないものの、この値が導かれた〔11 キャベンディッシュ 〕の実験が有名である。

演習問題

1　質量が 3.2kg の物体が地球表面にあるときの万有引力による位置エネルギーは何 J になるか。ただし，地球の半径を 6.4×10^{6}m，地球の質量を 6.0×10^{24}kg，万有引力定数を 6.7×10^{-11}N･m²/kg² とし，無限遠点を万有引力による位置エネルギーの基準点とする。

万有引力による位置エネルギーを U〔J〕とすると，

$$U=-G\frac{Mm}{r}=-6.7\times10^{-11}\times\frac{(6.0\times10^{24})\times3.2}{6.4\times10^{6}}$$
$$=-2.01\times10^{8}\fallingdotseq-2.0\times10^{8}[\mathrm{J}]$$

2　質量が 4.0×10^{24}kg の惑星から，1.3×10^{10}m だけ離れたところに小物体を置き，静かにはなしたところ，小物体は動き出した。惑星からの距離が 6.7×10^{9}m のところでは，小物体の速さは何 m/s か。ただし，万有引力定数を 6.7×10^{-11}N･m²/kg² とする。

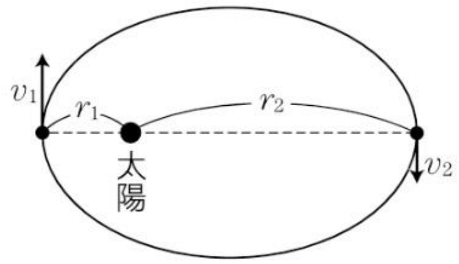
求める速さを v〔m/s〕，小物体の質量を m〔kg〕とすると，力学的エネルギー保存の法則より，無限遠点を万有引力による位置エネルギーの基準点として，

$$\frac{1}{2}m\times0^{2}+\left\{-6.7\times10^{-11}\times\frac{m\times(4.0\times10^{24})}{1.3\times10^{10}}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}mv^{2}+\left\{-6.7\times10^{-11}\times\frac{m\times(4.0\times10^{24})}{6.7\times10^{9}}\right\}$$

したがって，$v\fallingdotseq2.0\times10^{2}$〔m/s〕

☆

右図のように，太陽を1つの焦点として，ある惑星が楕円運動をしている。太陽からこの惑星の近日点までの距離をr_1，遠日点までの距離をr_2とし，惑星の近日点での速さをv_1，遠日点での速さをv_2とする。また，太陽の質量をM，万有引力定数をGとする。



(1) ケプラーの第2法則より，v_2をr_1，r_2，v_1を用いて表せ。
(2) 力学的エネルギー保存の法則より，v_2をG，M，r_1，r_2，v_1を用いて表せ。
(3) v_1をG，M，r_1，r_2を用いて表せ。

(1) $\frac{r_1}{r_2}v_1$　(2) $\sqrt{{v_1}^2+2GM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)}$　(3) $\sqrt{2GM\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}}$

(1) ケプラーの第2法則(面積速度一定の法則)より，
$\frac{1}{2}r_1v_1=\frac{1}{2}r_2v_2$　ゆえに，$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$

(2) 惑星の質量をmとすると，力学的エネルギー保存の法則より，無限遠点を万有引力による位置エネルギーの基準点として，
$\frac{1}{2}m{v_1}^2+\left(-G\frac{Mm}{r_1}\right)=\frac{1}{2}m{v_2}^2+\left(-G\frac{Mm}{r_2}\right)$
ゆえに，$v_2=\sqrt{{v_1}^2+2GM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)}$　($v_2<0$は不適)

(3) (1)(2)の結果より，v_2を消去すると，
$\frac{r_1}{r_2}v_1=\sqrt{{v_1}^2+2GM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)}$
${v_1}^2=2GM\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}$
ゆえに，$v_1=\sqrt{2GM\frac{r_2}{r_1(r_1+r_2)}}$　($v_1<0$は不適)