発展的な探究活動

数学Ｂ（漸化式と数学的帰納法）

仙台第三高等学校
安住　琢

漸化式と数学的帰納法を用いて，身近な事象について考察する力の育成

－　あみだくじの確率を考える　－

キーワード	単　元　目　標	単　元　計　画
○日常的事象の数学化 ○法則性を見抜き，それを論証する力	数列の一般項とその和，及び漸化式と数学的帰納法について理解する。また，それらを用いて事象を数学的に考察し処理できるようにする。	(1) 数列とその和・・・・・・・・・・・・・・・・・10 時間 (2) 漸化式と数学的帰納法・・・・・・・・６時間（本時６／６）

本時の学習 【漸化式と数学的帰納法】 （50 分）

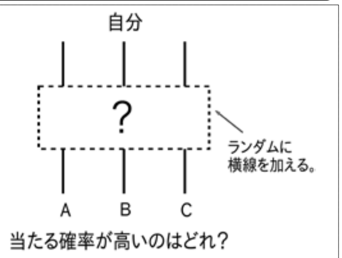
目標		評価規準	【概ね満足できる状況】	【十分満足できる状況】	【より発展させる手だて】
	漸化式・数学的帰納法を利用して，あみだくじの確率について考察する。 【数学的な見方・考え方】		・確率を具体的に求め，法則性について考察する。 ・推論には証明が必要である事を理解する。 ・誘導にしたがって漸化式を解くことができる。	・確率を具体的に求め，法則性から漸化式を導き出す。 ・推論に対して，数学的帰納法による証明を構成することができる。 ・法則性を利用して一般項を求めることができる。	・求めた一般項について n を大きくするとどのようになるかについて考察する。 ・初項が変わって対称性が使えないとすると，どのように漸化式を解く方法があるかについて考察する。

工夫のポイント

○あみだくじという身近な題材をとりあげ，日常的事象を数学的に考察させる。
○法則性を見つけさせ，それに数学的帰納法で裏付けを与える。
○そのままでは難易度の高い漸化式を，対称性を利用することで解き易くする。

学　習　活　動

課題　あみだくじはどこが当たりやすいか？



１．右図から課題を理解する。

２．３本の縦線のうち真ん中（B）からスタートした場合について，具体的に確率を求め，その手順を漸化式に表す。（図 2）
・図 2 から気づく法則性について意見を交換する。
・そのままでは解くのが大変な漸化式なので，$a_n = c_n$が成り立つという「対称性」について注目する。

３．「対称性」について，数学的帰納法で簡単な証明を与える。
・具体例から気づいた法則性が一般に成り立つものであることを確認する。

４．気付いた対称性を利用して，漸化式を解く。
・b_n，c_nを消去し，式変形することで階差数列を利用して一般項を求める。
・図 2 で求めた具体的な確率と一致するかを確認する。

指　導　上　の　留　意　点

1 について
・図 1 のように課題を定式化してやる。

2 について
・$b_{n+1} = a_n$という関係もあるが，ここでは特に対称性に注目させる。
評価　具体例の計算手順を漸化式の形に表現できるか。

3 について
・進度によっては，数学的帰納法で証明可能であることを述べるだけでも良い。

4 について
・b_n，c_nを消去すれば特性方程式の解に 1 を含むタイプの 3 項間漸化式となる。うまく変形を誘導することで 2 項間漸化式に持ち込む。
評価　二項間漸化式，階差数列の知識をうまく活用できるか。

実践のポイント ⇒ **確率を具体的に考察し，それを一般化に活かす**

・一般項は，

$$a_n = c_n = \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$
$$b_n = \frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

となる。
・n を大きくしていくと，一般項が 1/3 に近づいていくことが分かる。これは，横線の本数を増やせば，あみだくじは平等となることを示唆している。
・一般項の他の求め方としては，行列表現をして対角化する方法がある。
・数学的な考察を加える対象としてあみだくじは大変興味深い題材である。詳しくは「仙台三高ＳＳＨ活動記録集第２年次（平成 24 年３月）」を参照されたい。

図 1

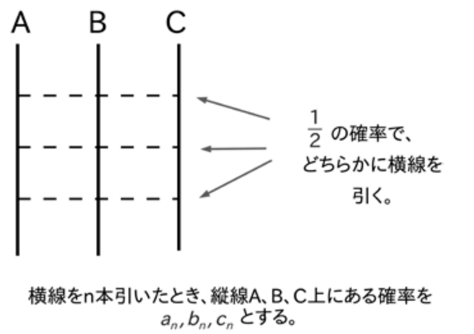
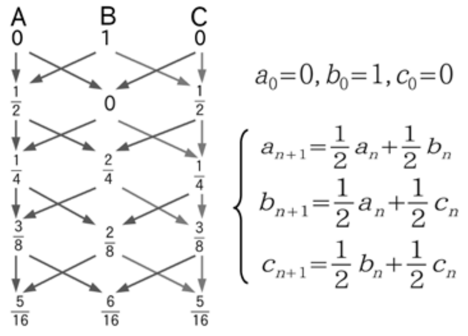


図 2



※ この指導事例は「みやぎの高校数学」（宮城県高等学校数学教育研究会編）に掲載されたものです。